

29/3/21

Έχουμε δει μέχρι τώρα : εσωτερικό γινόμενο, προβολές, διαμερίσματα

Gram - Schmidt, Ορθοκανονικοποίηση, Ορθοκανονικές βάσεις

$\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ορθο-βασίς

$$V = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n$$

$W \leq V$, $W^\perp$ ορθό συμπληρώμα του W

$Y, W \leq V$ $Y \perp W \Leftrightarrow \forall u \in Y$ και $w \in W$ ισχύει $\langle u, w \rangle = 0$

Π.χ. $\mathbb{R}_2[x]$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) : \text{Ευκλείδειος χώρος 1) Ν.Β.Υ}$

Προβολή του $f(x) = x^2 + 1$ στον υπόχωρο που γεννιέται από τα διανύσματα $g(x) = x$ και $h(x) = x^2$

Πύα:

$V = \langle g(x), h(x) \rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$. Πρέπει να χρησιμοποιήσω ορθογώνια βάση να πάρω τα $g(x)$ και $h(x)$ ορθογώνια με τη διαδικασία Gram-S

$$g(x) = x$$

$$h'(x) = h(x) = \frac{\langle h, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot x \, dx}{\int_0^1 x \cdot x \, dx} \cdot x =$$

$$= x^2 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} \cdot x = x^2 - \frac{1}{2} x$$

$$\text{proj}_V(f) = \text{proj}_S(f) + \text{proj}_{S^\perp}(f) = \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g + \frac{\langle f, h' \rangle}{\langle h', h' \rangle} h' =$$

$$= \frac{\int_0^1 (x^2+1) \cdot x \, dx}{\int_0^1 x \cdot x \, dx} \cdot x + \frac{\int_0^1 (x^2+1) \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx}{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{\int_0^1 (x^3+x) \, dx}{\frac{1}{3}} \cdot x + \frac{\int_0^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx}{\int_0^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) dx} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} x + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{48} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{432}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{\frac{113}{240}}{\frac{432+5}{432}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$144 \cdot 3 = 72 \cdot 32 = 36 \cdot 3 \cdot 2^3 =$$

$$= 18 \cdot 3 \cdot 2^3 = 9 \cdot 3 \cdot 2^4 =$$

$$= 3^3 \cdot 2^4$$

$$24 = 3 \cdot 2^3$$

2) Να υπολογιστεί ο γραμμικός α ποτε το διάνυσμα x^2+a και $x+1$ να έχουν ελάχιστη απόσταση στον $\mathbb{R}_2[x]$

Λύση: Η διαφορά τους (η απόσταση) $\|x^2+a - (x+1)\|$ και ψάχνω το ελάχιστο

$\|x^2 + a - (x+1)\|$ ελάχιστο $\Leftrightarrow \|x^2 + a - x - 1\|^2$ ελάχιστο :

$$\int_0^1 (x^2 - x + a - 1)^2 dx = \int_0^1 x^4 + x^2 + (a-1)^2 - 2x^3 + 2x^2(a-1) - 2x(a-1) dx$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + (a-1)^2 - \frac{2}{4} + \frac{2}{3}(a-1) - \frac{2}{2}(a-1) =$$

$$= \frac{1}{60} (12 + 20 + 60(a-1)^2 - 30 + 40(a-1) - 60(a-1)) =$$

$$= \frac{1}{60} (2 + 60a^2 - 120a + 60 + 40a - 40 - 60a + 60) = \frac{1}{60} (60a^2 - 140a + 82) =$$

$$= a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{41}{30}$$

Όταν $a \rightarrow \pm \infty$, η παράσταση $\rightarrow +\infty$. Άρα έχει ελάχιστο στο σημείο a_0 όπου $\left(a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{41}{30}\right)' = 0 \Rightarrow 2a - \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{7}{6}$$

Όταν $a = \frac{7}{6}$ τότε πετυχαίνουμε την ελάχιστη τιμή για το

$$x^2 - \frac{7}{6}x - 1$$

Ορθογώνιοι Πινάκες

Ένας πίνακας $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ καλείται **ορθογώνιος**, αν $A^{-1} = A^t$.

Το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων συμβολίζεται με:

$O(n)$

Ένας πίνακας $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ καλείται **ορθομοναδιαίος**, αν $A^{-1} = \bar{A}^t$.

Το σύνολο των ορθομοναδιαίων πινάκων συμβολίζεται με $U(n)$.

Ιδιότητες ορθογωνίων πινάκων

1) $A \cdot A^t = I = A^t \cdot A$ εξ' ορισμού

2) $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ γραμμές του A , $A^t = (A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t)$ στήλες

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} (A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το $(1,1)$ στοιχείο του $A \cdot A^t$ είναι το γινόμενο:

$$A_1 \cdot A_1^t = \langle A_1, A_1 \rangle \text{ και θα είναι ίσο με } 1$$

Αντ. το διάνυσμα A_1 έχει μήκος 1

Το $(2,1)$ στοιχείο του $A \cdot A^t$ είναι το γινόμενο:

$$A_2 \cdot A_1^t = \langle A_2, A_1 \rangle \text{ και θα είναι ίσο με } 0$$

Αντ. το διάνυσμα A_1 είναι $\perp$ με όλα τα υπόλοιπα

Το $(i,1)$ στοιχείο του $A \cdot A^t$ είναι το γινόμενο $A_i \cdot A_1^t = \langle A_i, A_1 \rangle$ και θα είναι ίσο με 0

Αναγώγως με τον ίδιο τρόπο η j -γραμμή του A , δηλ. η A_j είναι $\perp$ με όλες τις άλλες και έχει μήκος 1

Άρα οι γραμμές ενός ορθογωνίου πίνακα αποτελούν ορθοκανονική βάση

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $A^t \cdot A = I$ δείχνουμε ότι και οι στήλες ενός ορθογωνίου πίνακα αποτελούν ορθοκανονική βάση

3) $A \cdot A^t = I \Rightarrow \det(A \cdot A^t) = \det I = 1 \Rightarrow \det A \cdot \det A^t = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$ όχι ανώτερη

4) Με u θα συμβολίζουμε ένα διάνυσμα γραμμής του $\mathbb{R}^n$. Το $A \cdot u^t$ θα είναι ένα διάνυσμα στήλης του $\mathbb{R}^m$. Το $(A \cdot u^t)^t$ θα είναι ένα διάνυσμα γραμμής του $\mathbb{R}^m$.

$$(Au^t)^t = uA^t, \text{ γραμμή, } \langle uA^t, uA^t \rangle = uA^t (uA^t)^t = uA^t A \cdot u^t = u I u^t = u \cdot u^t = \langle u, u \rangle$$

$$\|u\|^2$$

$$\|u\|^2$$

$\langle uA^t, uA^t \rangle = \langle u, u \rangle$. Δηλ. ο ορθογώνιος πίνακας διατηρεί το μήκος (είναι ισομετρία).

5) Ο πίνακας μετάβασης από ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική είναι ορθογώνιος.

6) Το γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιο.

$$A, B \in O(n) \Leftrightarrow A \cdot A^t = I = A^t \cdot A \text{ και } B \cdot B^t = I = B^t \cdot B$$

$$(AB)(AB)^t = AB B^t A^t = A \cdot I \cdot A^t = I \Rightarrow AB \in O(n). \text{ Το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων αποτελεί ομάδα.}$$

7) Οι ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα έχουν μέτρο 1.

$$Au = \lambda u \text{ και το } u \text{ είναι στήλη} \Rightarrow (Au)^t \text{ είναι γραμμή} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Au)^t = u^t A^t, \langle (Au)^t, (Au)^t \rangle = \langle u^t A^t, u^t A^t \rangle = \langle u^t, u^t \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle (Au)^t, (Au)^t \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle u^t, u^t \rangle = \langle u^t, u^t \rangle \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \text{ Το } \lambda \text{ δεν ξέρω αν είναι πραγματικό ή μιγαδικό ιδιοτιμή}$$

$$\Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \text{ Από το μέτρο του } \lambda \text{ είναι } 1$$

$$\lambda \in \mathbb{R}: \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Αν μια ιδιοτιμή του ορθογώνιου πίνακα A είναι -1 , τότε ο ιδιοχώρος $V(-1)$ καλείται ανταγωνιστικός ιδιοχώρος.

Πρόταση: 1) Για $n=1$, A : ορθογώνιος $A = (\pm 1)$

2) Για $n=2$, A : ορθογώνιος $= \begin{pmatrix} a & \delta \\ b & \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \cos \phi & \pm \sin \phi \\ \mp \sin \phi & \pm \cos \phi \end{pmatrix}$

Θέλουμε: $A \cdot A^t = I = A^t \cdot A$, γραμμικές ή στήλες ορθοκανονικές
basis

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \cos \phi \text{ ή } a = -\cos \phi, b = \pm \sin \phi$$

$$\delta^2 + \varsigma^2 = 1 \Rightarrow \delta = \cos \theta \text{ ή } \delta = -\cos \theta, \varsigma = \pm \sin \theta$$

$$a\delta + b\varsigma = 0 \Rightarrow \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta = 0 \Rightarrow \cos(\phi - \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \phi - \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \phi - \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \theta, \cos \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \text{ ή } A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Οι 2×2 πίνακες (ορθογώνιοι) έχουν μορφή:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

Έχει ορίζουσα 1 Έχει ορίζουσα -1

Να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές τους:

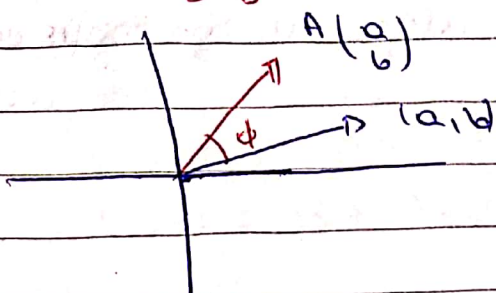
$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos \phi - \lambda & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos \phi - \lambda)^2 + \sin^2 \phi =$$
$$= \cos^2 \phi + \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + \sin^2 \phi =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + 1$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \phi - 4 \leq 0$$

Η $\Delta = 0 \Leftrightarrow \phi = 0 \text{ ή } \pi$. Για $\phi \neq 0 \text{ ή } \pi$, τότε δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές

$$y=0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ έχει ορίζοντα 1, δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές και δίνει στροφή κατά γωνία ϕ



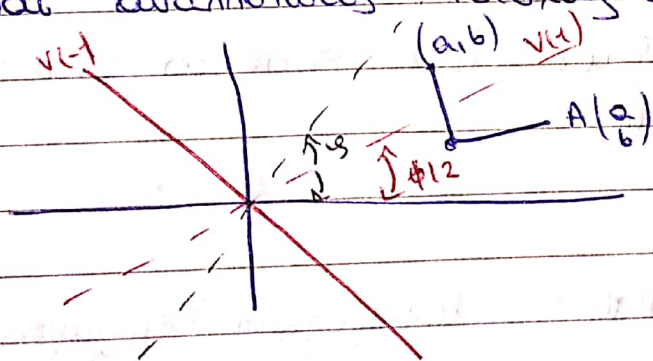
Αν είχε ιδιοδιάνυσμα: $Au = \lambda u$
Αυτό βγαίναμε στην ίδια ευθεία

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi - \lambda & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi - \lambda \end{pmatrix} = +(\lambda^2 - \cos^2\phi) - \sin^2\phi =$$

$$= \lambda^2 - \cos^2\phi - \sin^2\phi = \lambda^2 - 1 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$V(\lambda)$ είναι ανεξάρτητοι ιδιοχώροι



Ο $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ δίνει

σύμμετρη ως προς τον άξονα $V(1)$ ο οποίος έχει γωνία $\phi/2$ με τον άξονα xx'